

理学博士伊藤 清君の「確率微分方程式の研究」に対する 授賞審査要旨

確率微分方程式は、一九〇八年に物理学者 Langevin が導入した Langevin 方程式を特殊な場合として含む極めて一般的なものであって、統計物理学、工学、生物学、経済学などにおいて、瞬間ごとに偶然的要素が介入する現象を記述する微分方程式として現在広く用いられている。その数学的基礎は、伊藤清君が一九四四年に発表した「確率積分(6)」および一九四六年に発表した「確率積分方程式(8)」によって与えられたものであり、同君はこれらを一般化して一九五二年にアメリカ数学会から「確率微分方程式(11)」を公刊した。今日、確率微分方程式に関する研究発表のなかに伊藤君の上記三論文を引用していないものはない。たとえば経済学者 Samuelson は、その一九七三年に発表した論文「投機価格の数学理論」の附録に伊藤理論の解説を与えているのである。以下伊藤君の業績についてややくわしく述べる。

Langevin 方程式は、 $dX(t) = aX(t)dt + \epsilon(t)$ と与えられる粒子の運動に、ランダムな摂動としていわゆる「白色雑音」 $\epsilon(t)$ を付け加えた方程式

$$dX(t) = [\alpha X(t) + \beta \epsilon(t)]dt \quad (\alpha, \beta \text{ は定数})$$

である。「白色雑音」は「ブラウン運動」 $W(t)$ の \dot{W} に関する微分とされているが、「ブラウン運動の軌動がいたる

ところ微分可能でない確率が「である」から、 $\xi(t)$ は $W(t)$ を超函数的に微分したものととしてその定義は複雑である。然しその積分は $\int_{t_0}^t \xi(t) dt = \int_{t_0}^t dW(t) = W(t) - W(t_0)$ によって疑義なく与えられる。ところが Langevin 方程式を一般にした確率微分方程式は

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + G(t)dW(t)$$

の如く通常の函数による $f(t, X(t))dt$ の他に、ランダムな函数 $G(t)$ を含む項をも考えなければならぬ。ランダムなもの積を含む積分 $\int_{t_0}^t G(t)dW(t)$ の定義は難しい。伊藤君はこの困難を克服する為に、ブラウン運動では $t_{n+1} \leq t_n < t_{n+1}$ なる区間で $(W(t_{n+1}) - W(t_n))$ と $(W(t_{n+1}) - W(t_n))$ とが確率的に独立なことに注目して、広汎な $G(t)$ の類に対して $\int_{t_0}^t G(t)dW(t)$ を近似和

$$\sum_{i=0}^{n-1} G(t_i)[W(t_{i+1}) - W(t_i)] \quad (t_0 < t_1 < \dots < t_n = t, t_{i+1} - t_i = 1/n)$$

におよび $n \rightarrow \infty$ とした極限として、適切に定義できることを示した。この「確率積分」に基づく「確率微積分」は、今日 Ito Calculus とも呼ばれている。

「確率微分方程式」を「確率積分方程式」で表現し、これを「確率積分」を用いて解くという伊藤君の着想 (6・8・11) のすぐれた特長は、通常の微分方程式を解くのに用いられる「Picard の逐次近似法」が、通常の積分を確率積分で置きかえればその儘適用され、しかも高次元の場合も一次元の場合と同じように論ずることができることにある。伊藤君は、この着想に基いて「一般の確率過程の軌道」の満たす確率微分方程式を定式化し、これを解いてこの過程の軌道を決定した。

そもそも「確率過程の遷移確率」の満足すべき方程式の型の研究は、古く Fokker と Planck とによって始められ、一九三〇年代に Kolmogorov がその一般型を定式化した。この「Kolmogorov 方程式」は函数空間における発展方程式として作用素の半群理論などを用いて解くことができる。これに対して、「確率過程の微細構造としての見本軌道」を与えるのが「伊藤方程式」とも呼ばれる確率微分方程式であり、これを解く一般理論を構築した伊藤君の業績は極めて著しく、内外に大きな指導的影響を及ぼした。この数年の間に、伊藤理論に基いた確率微分方程式の著書が Stratonovich (一九六八年)、『McKean (一九六九年)』、『Arnold (一九七一年)』、『Gihman-Skorohod (一九七一年)』、『渡辺信三(一九七五年)』などによって相ついで出版されたことは、そのことを如実に示しているのである。

伊藤君は、確率微分方程式のみならず、確率論、確率過程論などにおいても、すぐれた論文や著書を数多く発表している。たとえば、一九七〇年に Springer-Verlag から出版した McKean との共著 Diffusion Processes and their Sample Paths (41) はこの方面の標準を高めた名著であり、既に二版を出している。

伊藤君の数学者としての国際的な活動の状況は、その履歴の示すように、米国スタンフォード大学、デンマーク国オールブス大学および米国コーネル大学にそれぞれ数年にわたって教授として貢献したことや、また数々の国際会議たとえばクレルモン・フェラン市における「パスカル生誕三百年記念国際会議(一九六二年)」、ストックホルム市における「国際数学者会議(一九六二年)」、ヴァンクーヴァー市における「国際数学者会議(一九七四年)」などに招かれて特別講演をしたことから明らかである。

伊藤君はまた国際的な応用数学の専門誌として良く知られている Applied Mathematics and Optimization の

編集者の一人としても活躍している。なお、伊藤君は以上のような研究成果に対して昭和五十三年度朝日賞を受けて
 5 No°

1' 井藤文雄博士

1. On stochastic processes. (Doctoral thesis). Jap. Journ. Math. 18, 261-301 (1942).
2. On the ergodicity of a certain stationary process. Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, 54-55 (1944).
3. A Kinetic theory of turbulence. Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, 120-122 (1944).
4. On the normal stationary process with no hysteresis. Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, 199-202 (1944).
5. A screw line in Hilbert space and its application to the probability theory. Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, 203-209 (1944).
6. Stochastic integral. Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, 519-524 (1944).
7. On Student's test. Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, 694-700 (1944).
8. On stochastic integral equation. Proc. Jap. Acad. 22, 32-34 (1946).
9. Stochastic differential equations in a differentiable manifold. Nagoya Math. Journ. 1, 35-47 (1950).
10. Brownian motion in a Lie group. Proc. Jap. Acad. 26, 4-10 (1950).
11. On stochastic differential equations. Mem. Amer. Math. Soc. 4, 1-51 (1951).
12. On a formula concerning stochastic differentials. Nagoya Math. Journ. 3, 55-65 (1951).
13. Multiple Wiener integral. Journ. Math. Soc. Japan 3, 157-159 (1951).
14. Stochastic differential equation in a differentiable manifold (2). Mem. Coll. Science, Univ. Kyoto,

- Ser. A. Math. 28, 81-85 (1953).
15. Stationary random distributions. Mem. Coll. Science, Univ. Kyoto, Ser. A. Math. 28, 209-223 (1953).
 16. Complex multiple Wiener integral. Jap. Journ. Math. 22, 63-86 (1953).
 17. Isotopic random current. Proc. Third Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob. 2, 125-132 (1955).
 18. Special type of the shift transformation of differential processes with stationary increments. Trans. Amer. Math. Soc. 81, 253-263 (1956).
 19. Potentials and the random walk (with H. P. McKean, Jr.). Illinois Journ. Math. 4, 119-132 (1960).
 20. Wiener integral and Feynman integral. Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Statistics and Prob. 2, 227-238 (1960).
 21. Construction of diffusions. Ann. Fac. Sci. Univ. Clermont 2, 23-32 (1962).
 22. The Brownian motion and tensor fields on Riemannian manifold. Proc. Intern. Congress of Mathematicians (Stockholm). 1962.
 23. Brownian motion on a half line (with H.P. McKean, Jr.). Illinois Journ. Math. 7, 181-231 (1963).
 24. The expected number of zeros of continuous stationary Gaussian processes. Journ. Math. Kyoto Univ. 3, 207-216 (1964).
 25. On stationary solutions of a stochastic differential equation (with M. Nisio). Journ. Math. Kyoto Univ. 4, 1-75 (1964).
 26. Transformation of Markov processes by multiplicative functionals (with S. Watanabe). Ann. P'Inst. Fourier. Univ. Grenoble 25-1, 13-30 (1965).

27. The canonical modification of stochastic processes. *Journ. Math. Soc. Japan.* **20**, 130–150 (1968).
28. On the convergence of sum of independent Banach space valued random variables (with M. Nisio). *Osaka Journ. Math.* **5**, 35–48 (1968).
29. Generalized uniform complex measures in the Hilbertian metric space with their application to the Feynman integral. *Proc. Fifth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob.* **2-2**, 145–161 (1965).
30. On the oscillation functions of Gaussian processes (with M. Nisio). *Math. Scand.* **22**, 209–223 (1968).
31. Canonical measurable random functions. *Proc. Int. Conf. on Funct. Analysis and Rel. Topics*, 369–377 (1969).
32. The topological support of Gauss measure on Hilbert space. *Nagoya Math. J.* **38**, 181–183 (1970).
33. Poisson point processes attached to Markov processes. *Proc Sixth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob.* **3**, 225–237 (1970).
34. Stochastic differentials of continuous local martingales. *Springer Lecture Note in Mathematics 294 (Stability of stochastic dynamical systems)*, 1–7 (1972).
35. Stochastic integration. *Vector and operator valued measures and appl.* *Acad. Press* (1973), 141–148.
36. Stochastic differentials. *Appl. Math. and Opt.* **1-4** (1975) 874–881.
37. Stochastic parallel displacement. *Springer Lecture Note in Mathematics (Probabilistic methods in stochastic differential equations)* **451** (1974), 1–7.
38. Stochastic calculus. *Springer Lecture Note in physics* **39** (Mathematical problems in physics)

218-223 (1975).

39. Extension of stochastic integrals. Proc. Internat. Symp. on Stochastic Differential Equations 1976 Kyoto.
40. Lectures on Stochastic processes, Tata Institute of Fundamental Research (1961).
41. Diffusion Processes and Their Sample Paths (with H.P. McKean, Jr.). Springer-Verlag (1965).
42. Stochastic Processes. Aarhus Lecture Note (1968).